



IJTIMOIIY-GUMANITAR SOHADA ILMIY-INNOVATSION TADQIQOTLAR

ILMIY METODIK JURNALI



VOL.3 № 2

2026

OLIIY ALGEBRA VA MAKTAB MATEMATIKASIDA MURAKKAB IRRATSIONAL MAXRAJLARNI RATSIONAL KO'RINISHGA KELTIRISHNING INTEGRATSIYALASHGAN ZAMONAVIY METODIKASI

Parmanov Abulqosim Abdurashidovich
*Jizzax davlat pedagogika universiteti dotsenti,
pedagogika fanlari falsafa doktori*

Annotatsiya

Ushbu maqola kasr maxrajidagi murakkab irratsional ifodalarni — xususan, bir nechta turli asosli kub ildizlar qatnashgan holatlarda — ratsional shaklga keltirish masalasini maktab matematikasi va oliy algebra kurslarida integratsiyalashgan holda o'qitishning zamonaviy metodikasiga bag'ishlangan. An'anaviy usullar (qo'shma ifodalar) faqat bitta kvadrat ildiz yoki sodda kub ildizlar bilan cheklanganligi ko'rsatilib, murakkab holatlar uchun algebraik sonlar nazariyasi doirasidagi fundamental vositalar — minimal ko'phad, algebraik kengaytma maydonining bazisi va teskari elementni topish — asosida yechimlar taklif etilgan.

Kalit so'zlar: Irratsionallik, qo'shma ifoda, algebraik kengaytmalar, minimal ko'phad, kengaytirilgan Evklid algoritmi, ratsionalizator ko'paytuvchi.

ИНТЕГРИРОВАННАЯ СОВРЕМЕННАЯ МЕТОДИКА РАЦИОНАЛИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ В ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ И ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Парманов Абулкосим Абдурашидович
доцент Джизакского государственного педагогического университета

Аннотация

Настоящая статья посвящена современной методике интегрированного преподавания задачи рационализации знаменателей дробей с сложными иррациональными выражениями — в частности, в случаях, когда в знаменателе присутствует сумма или произведение нескольких кубических корней с различными основаниями — в курсах школьной математики и высшей алгебры. Показано, что традиционные методы (использование сопряжённых выражений) ограничены случаями с одним квадратным корнем или простыми кубическими корнями. Для более сложных ситуаций предлагаются решения на основе фундаментальных инструментов алгебраической теории чисел: минимального многочлена, базиса алгебраического расширения поля и нахождения обратного элемента в этом расширении.

Ключевые слова: Иррациональность, сопряженное выражение, алгебраические расширения, минимальный многочлен, расширенный алгоритм Евклида, рационализирующий множитель.

INTEGRATED MODERN METHODOLOGY FOR RATIONALIZING COMPLEX IRRATIONAL DENOMINATORS IN HIGHER ALGEBRA AND SCHOOL MATHEMATICS

Parmanov Abulqosim Abdurashidovich
Associate professor, Jizzakh state pedagogical university

Abstract

This article is devoted to a modern integrated methodology for teaching the problem of rationalizing denominators of fractions containing complex irrational expressions — particularly in cases involving sums or products of several cube roots with distinct bases — within school mathematics and higher algebra curricula. It is demonstrated that traditional methods (conjugate expressions, rationalizing conjugates) are limited to single square roots or simple cubic roots. For more intricate cases, solutions are proposed based on fundamental tools of algebraic number theory: the minimal polynomial, the basis of an algebraic number field extension, and the computation of the inverse element within that extension.

Keywords: Irrationality, conjugate expression, algebraic extensions, minimal polynomial, extended Euclidean algorithm, rationalizing factor.

Matematik ifodalarni standart ko‘rinishga keltirish va hisoblash jarayonlarini soddalashtirishda kasr maxrajini irratsionallikdan qutqarish muhim ahamiyatga ega. Maktab matematika kursida asosan kvadrat ildizlar va sodda kub ildizlar bilan ishlash usullari o‘rgatiladi. Bunda maxrajning qo‘shmasiga surat va maxrajni ko‘paytirish orqali masalani hal qilish mumkin. Oliy matematika va kompyuter algebrasi tizimlarida (CAS) ancha murakkab algebraik kengaytmalar uchraydi.

Maqolada keltirilgan usullar klassik oliy algebra va sonlar nazariyasiga tayanadi. Xususan, Lang (2002) va Childs (2009) kabi mualliflarning asarlari algebraik kengaytmalar va maydonlar nazariyasini tushunishda poydevor hisoblanadi. Tadqiqotda qo‘llanilgan asosiy tushunchalar — minimal ko‘phad, keltirilmaydigan ko‘phad va algebraik kengaytmalar aynan shu kabi fundamental adabiyotlarda batafsil bayon etilgan. Shoup (2009) asarida bu algoritmning kompyuter algebrasi va sonlar nazariyasidagi hisoblash samaradorligi tahlil qilingan bo‘lsa, maqolada biz ushbu algoritmni kasr maxrajini irratsionallikdan qutqarishga, ya‘ni ratsionalizator ko‘paytuvchini topishga tatbiq etganmiz. Mahalliy adabiyotlardan Nazarov va boshqalar (1995) hamda Ayupov va boshqalar (2019) darsliklari ushbu sohada o‘zbek tilidagi asosiy manbalar sifatida ko‘rsatilgan. Bu manbalarda ko‘phadlar halqasida eng katta umumiy bo‘luvchini topish va chiziqli bog‘lanishlar nazariyasi yoritilgan bo‘lib, maqolada keltirilgan $A(x) \cdot Q(x) + B(x) \cdot P(x) = 1$ formulasi aynan shu nazariyaga asoslanadi.

Maqolada ikkinchi metod sifatida ko‘rsatilgan noma‘lum koeffitsiyentlar usuli muammoni chiziqli tenglamalar sistemasiga keltirish orqali yechishni taklif etadi. Bu usul chiziqli algebra metodlarining (bazis elementlar kombinatsiyasi) algebraik sonlar nazariyasi bilan integratsiyasini namoyon qiladi. Maqolada keltirilgan adabiyotlar ro‘yxati va ularning tahlili shuni ko‘rsatadiki, maqolada faqatgina o‘quv qo‘llanmalari bilan cheklanib qolmay, xalqaro miqyosdagi fundamental ilmiy manbalarga (Lang, Shoup, Childs) murojaat qilingan. Bu esa taklif etilayotgan universal yechim algoritmining ilmiy asoslanganligini va nazariy jihatdan mukammalligini bildiradi.

Tadqiqotda murakkab irratsionalliklarni ratsional ko‘rinishga keltirishning ikkita asosiy metodi metodologik asos sifatida olindi:

Bizga ma‘lumki biror P maydonda berilgan $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi Evklid algoritmi yordamida topiladi. Evklid algoritmining natijasi sifatida quyidagi kengaytirilgan Evklid algoritmi haqidagi teoremani isbotsiz beramiz.

Teorema. P maydon ustida berilgan $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi $d(x)$ bo‘lsa, u holda bu maydonda ular uchun ushbu

$$f(x) \cdot \varphi(x) + g(x) \cdot h(x) = d(x) \quad (1)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\varphi(x)$ va $h(x)$ ko‘phadlar mavjud [1;44-b].

Bu teoremaning isboti [1;44-b] da berilgan. Buni o'rganish o'quvchiga havola qilinadi. Yuqoridagi teoremani kasr maxrajini ratsional ifodaga keltirishga tadbqiqini ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, bizga $x = \alpha$ soni berilgan va u biror $P(x)$ ko'phadining ildizi bo'lsin. Bizga berilgan ifoda $\frac{1}{Q(\alpha)}$ ko'rinishidagi kasrdan iborat bo'lsa, maxrajni irratsionallikdan qutqarish uchun biz shunday $R(x)$ ko'phadini topishimiz kerakki, bu $R(x)$ ni berilgan kasrning surat va maxrajiga ko'paytirishimiz natijasida berilgan kasrning maxrajidagi ifoda ratsional son bo'lsin.

$R(x)$ ni topish uchun irratsional α son uchun shunday eng kichik darajali (minimal ko'phad) $P(x)$ ko'phadi topiladiki, u $P(\alpha) = 0$ ni qanoatlantirsin[2;86-b]. Kengaytirilgan Evklid algoritmini qo'llaymiz: $P(x)$ ko'phad minimal ko'phad bo'lganligi uchun u berilgan maydonda keltirilmaydigan ko'phad bo'lib, $P(x)$ va $Q(x)$ ko'phadlar o'zaro tub bo'ladi. U holda (1) ga ko'ra berilgan maydonda $A(x)$ va $B(x)$ ko'phadlar mavjudki, ular uchun

$$A(x) \cdot Q(x) + B(x) \cdot P(x) = 1 \quad (2)$$

o'rinli. (2) tenglikka $x = \alpha$ qiymatni berib va $P(\alpha) = 0$ ni e'tiborga olsak, $A(\alpha) \cdot Q(\alpha) = 1$ ni hosil qilamiz. Bundan $A(\alpha)$ ko'paytuvchi biz izlayotgan maxrajni irratsionallikdan qutqaruvchi *ratsionalizator ko'paytuvchi* deb ataymiz[3;124-b].

Maxrajda bir nechta turli asosli ildizlar qatnashganda, ratsionalizator ko'paytuvchi maydon bazis elementlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida izlanadi[4;43-b]. Bu metod yordamida murakkab irratsionallikni chiziqli tenglamalar sistemasiga keltirib yechish mumkin. Tadqiqot davomida quyidagi murakkab ifoda ikkala usulda ham yechib ko'rsatildi:

1-misol. $\frac{1}{2-3 \cdot \sqrt[3]{2}+5 \cdot \sqrt[3]{4}}$ ni maxrajini irratsionallikdan qutqaring.

Kengaytirilgan Evklid algoritmidan foydalanib yechamiz: Berilgan kasrning maxrajini $5 \cdot \sqrt[3]{4} - 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 2$ ko'rinishida yozib olamiz va $\alpha = \sqrt[3]{2}$ belgilash olamiz. U holda $x = \sqrt[3]{2}$ ni qanoatlantiruvchi minimal ko'phad $P(x) = x^3 - 2$ va maxrajini esa $Q(x) = 5x^2 - 3x + 2$ deb olamiz. Evklid algoritmgiga ko'ra,

$$x^3 - 2 = (5x^2 - 3x + 2) \left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{25} \right) - \left(\frac{1}{25}x + \frac{56}{25} \right)$$

$$5x^2 - 3x + 2 = (x + 56)(5x - 283) + 15850$$

dan esa birinchi tenglikdan

$$x + 56 = (5x^2 - 3x + 2)(5x + 3) - 25(x^3 - 2)$$

ikkinchi tenglikdan

$$15850 = (5x^2 - 3x + 2) - (x + 56)(5x - 283)$$

ifodalarni topib, hosil bo'lgan ikkinchi tenglikka birinchisini qo'yib, $A(x) = 34 + 56x - x^2$ ekanligini va $x = \sqrt[3]{2}$ ekanligidan ratsionalizator ko'paytuvchi $34 + 56\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ ni topdik. Berilgan kasrning surat va maxrajini ratsionalizator ko'paytuvchiga ko'paytirib,

$$\frac{1}{2 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{34 + 56\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{634}$$

ga ega bo'lamiz.

Berilgan misol maxraji $Q[\sqrt[3]{2}]$ kengaytmadan iborat ekanligidan uning bazisini $\{\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\}$ dan iborat bo'ladi[5]. Shunga ko'ra ratsionalizator ko'paytuvchini $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ ko'rinishida olamiz va berilgan kasrning maxrajidagi ifodaning teskarisini aniqlaymiz:

$$(5 \cdot \sqrt[3]{4} - 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 2)(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) = 1$$

Qavslarni ochib va ayniyatdan foydalansak,

$$\begin{cases} 2a + 10b - 6c = 1 \\ -3a + 2b + 10c = 0 \\ 5a - 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Sistemaning yechimi $a = \frac{17}{317}, b = \frac{28}{317}, c = -\frac{1}{634}$ dan iborat. Demak, ratsionalizator ko'paytuvchi

$$\frac{17}{317} + \frac{28}{317} \sqrt[3]{2} - \frac{1}{634} \sqrt[3]{4}$$

ekanligini aniqlaymiz va biz izlayotgan qiymatni aniqlaymiz

$$\frac{1}{2 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{34 + 56\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{634}.$$

Yakuniy natija har ikkala usulda ham bir xil chiqadi. Tadqiqot ob'ekti sifatida $\frac{1}{2 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{4}}$ ifodani oldik. Bunda ratsionalizator ko'paytuvchining bazisi ikkita $\{\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\}$ elementdan iborat. Shuning uchun berilgan misolni yechish birmuncha soddaroq. Ammo matematikada bundanda murakkabroq bo'lgan ifodalar berilishi ham mumkin.

Masalan, $\frac{1}{2 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{3}}$ ko'rinishidagi ifodaning maxrajini irratsionallikdan qutqarishda kengaytirilgan Evklid algoritmda $(2 - 3\sqrt[3]{2}) + 5\sqrt[3]{3}$ ko'rinishida guruhlab olib yechamiz. Natijada kengaytirilgan Evklid algoritmini yana bir marta qo'llab ko'zlangan natijani olamiz. Noma'lum koeffitsiyentlar usulida ratsionalizator ko'paytuvchining bazisi $\{\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{9}\}$

dan iborat bo'lib, 9 ta noma'lumli, 9 ta chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu sistemani yechish orqali masala hal qilinadi.

Tadqiqot natijasida kasr maxrajidagi murakkab irratsional ifodalarni ratsional ko'rinishga keltirish masalasi shunchaki algebraik shakl almashtirish emas, balki algebraik sonlar maydonida teskari elementni topishning fundamental jarayoni ekanligi ko'rsatib berildi. Kengaytirilgan Evklid algoritmi irratsional ifodalarning minimal ko'phadlari bilan ishlashda universal xarakterga ega bo'lib, u har qanday chekli algebraik kengaytmada elementning teskarisini topish mumkinligini bildiradi. Noma'lum koeffitsiyentlar usuli bir nechta turli asosli irratsional asoslar qatnashgan holatlarda muammoni chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish orqali yechimning strukturaviy aniqligini ta'minlaydi. Demak, har qanday murakkab ratsional ifodani ratsional ko'rinishga keltirish mumkin degan xulosaga kelimiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. R.N.Nazarov, B.T.Toshpo'latov, A.D.Do'sumbetov. Algebra va sonlar nazariyasi. II qism. O'quv qo'llanma. Toshkent. O'qituvchi. 1995 yil.
2. Lang, S. Algebra. Springer-Verlag. (2002).
3. Childs, L. N. A Concrete Introduction to Higher Algebra. Springer. (2009).
4. Shoup, V. A Computational Introduction to Number Theory and Algebra. Cambridge University Press. (2009).